ΑΣΚΗΣΕΙΣ Δ.Ε ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ | ΚΕΦ. 2° |

1) Να επιλυθεί το παρακάτω Π.Α.Τ.

$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$, $x>0$, $y(1)=0$ και $y'(1)=1$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για μια μη ομογενή γραμμική Δ.Ε με σταθ. συντελεστές και η λύση της θα δίνεται από τον τύπο:

$y_{\text{γεν. μη ομογ.}} = y_{\text{μερ. μη ομογ.}} + y_{\text{γεν. ομογ.}}$ (1)

Παίρνουμε την ομογενή:

(E_0): $y''-2y'+y=0$ γραμ. διαφ. εξισ. β' τάξης με σταθ. συντελεστές

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$ όπου $\lambda=1$ λύση πολ/τας 2

Άρα, ένα ΒΣΛ της ομογενούς θα είναι:

$S=\{e^x, x\cdot e^x\}$ $x>0$

Άρα, $y_{\text{γεν. ομογ}} = c_1\cdot e^x + c_2\cdot x\cdot e^x$, $\forall x>0$ c_1, c_2: αυθ. σταθ.

Για να βρούμε τη μερική λύση της μη ομογενούς:

$$W(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x\end{pmatrix} = e^{2x}, \quad x>0$$

$$W_1(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix} 0 & xe^x \\ 1 & e^x+xe^x\end{pmatrix} = -xe^x, \quad x>0$$

$$W_2(y_1,y_2)(x)=\det\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1\end{pmatrix} = e^x, \quad x>0$$

Συνεπώς,

$$y_{\text{μερ. μη ομογ}} = y_1(x)\cdot\int_1^x \frac{W_1(t)}{W(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(t)}{W(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt$$

$$= e^x\cdot\int_1^x \frac{-\cancel{t}e^t}{e^{2t}}\cdot\frac{e^t}{\cancel{t}}\,dt + x\cdot e^x\cdot\int_1^x \frac{e^t}{e^{2t}}\cdot\frac{e^t}{t}\,dt =$$

$$= e^x\cdot(x\cdot\log x - x + 1), \quad \forall x>0$$

Επομένως, η (1) θα γίνει:

$y_{\text{γεν. μη ομογ}} = c_1\cdot e^x + c_2 xe^x + e^x\cdot(x\log x - x + 1)$, $\forall x>0$

Άρα,

$$y_{Γ.Μ.Ο}(x) = y(x) = (c_1+1)e^x + (c_2-1)xe^x + x\cdot e^x \cdot \log x, \ x>0$$

- $y(1)=0 \Rightarrow (c_1+1)e^1 + (c_2-1)e^1 = 0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2 \quad (2)$
- $y'(x) = (c_1+1)e^x + (c_2-1)(x\cdot e^x + e^x) + (xe^x+e^x)\log x + e^x, \ x>0$

$y'(1)=1 \Rightarrow (c_1+1)e^1 + (c_2-1)\cdot 2e^1 + e^1 = 1 \Rightarrow c_1+2c_2 = \frac{1}{e} \quad (3)$

Αν λυθούν οι (1) και (2) ως σύστημα, τότε:

$c_1 = -\frac{1}{e}$ και $c_2 = \frac{1}{e}$

Άρα, η λύση του Προβλήματος αρχικών τιμών, είναι:

$$y(x) = \left(-\frac{1}{e}+1\right)e^x + \left(\frac{1}{e}-1\right)e^x\cdot x + xe^x\cdot \log x \quad , \forall x>0$$

2) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$(1-x)y'' + xy' - y = 0 \ , \forall x>1 \quad (E_1)$

Εάν είναι γνωστό ότι έχει κοινή λύση με την

$2x(2x-1)y'' - (4x^2+1)y' + (2x+1)y = 0 \ , x>1 \quad (E_2)$

ΛΥΣΗ

Οι εξισώσεις (E_1) και (E_2) έχουν κοινή λύση

Έστω αυτή η κοινή λύση y_1. Άρα, για αυτή τη λύση y_1 οι εξισώσεις (E_1) και (E_2) μπορούν να επιλυθούν σαν σύστημα

Από την (E_1) έχουμε:

$y_1'' = \dfrac{y-xy'}{1-x}, \ x>1$ και αντικαθιστώντας στην (E_2), έχουμε:

$$2x(2x-1)\left(\frac{y-xy'}{1-x}\right) - (4x^2+1)\cdot y' + (2x+1)y = 0 \Rightarrow \ldots y_1' - y_1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1' = y_1$. (Αρκεί, δηλαδή να βρούμε μια συνάρτηση η οποία όταν παραγωγίζεται να μας δίνει τον "εαυτό" της. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η e^x.)

Εάν δεν το σταματούμε αυτό το βήμα, τότε μπορούμε να λύσουμε τη Δ.Ε α' τάξης: $y_1'-y_1=0$ όπου θα μας δώσει ότι $y_1(x) = c\cdot e^x, \ x>1$ και αφού ζητάμε μια μερική λύση έστω $c=1$ άρα $y_1(x)=e^x, \ x>1$

$\Rightarrow x^{a+2}\cdot z''+(2a+1)x^{a+1}\cdot z'+(x^2+a^2-\frac{1}{4})x^{a}\cdot z = x^{3/2}\cdot \sin x$

Ένα κατάλληλο $a\in\mathbb{R}$ είναι το $a=-\frac{1}{2}$ (διότι σκοπός μας είναι η δύναμη του βαθμού του πολυωνύμου από τη δεξιά μεριά να είναι ίσος με το βαθμό του πολυωνύμου από την αριστερή μεριά της εξίσωσης. (δηλαδή πρακτικά η σκέψη μας είναι: $x^{a+2}\cdot x^{a+1}\cdot x^{a} = x^{3/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+2+a+1+a=\frac{3}{2} \Rightarrow \cancel{3}a+\cancel{3}=\frac{\cancel{3}}{2} \Rightarrow a=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$)

Τότε, θα έχουμε:

$x^{3/2}\cdot z''+\underbrace{\cancel{(2(-\frac{1}{2})+1)x^{1/2}}}_{\to 0}\, z'+(x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})x^{-1/2}\cdot z = x^{3/2}\sin x \Rightarrow$

$x^{3/2}\cdot z''+x^{3/2}\cdot z = x^{3/2}\cdot \sin x \Rightarrow \quad z''+z=\sin x,\ x>0$

και ομογενής $z''+z=0,\ x>0$

1ο: για την ομογενή με σταθερούς συντελεστές:

παίρνουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$P(\lambda)=\lambda^2+1 \rightsquigarrow \lambda_1=i$ και $\lambda_2=-i$

Συνεπώς, η ομογενής θα έχει ΒΣΛ το εξής

$\{\sin x, \cos x\}\ \forall x>0$, $\quad \tilde{z}(x)=c_1\cdot\sin x+c_2\cdot\cos x,\ \forall x>0$

2ον: για τη μη ομογενή με σταθερούς συντελεστές:

με τη μέθοδο των αγνώστων σταθερών, θέτουμε:

$(E_1): z''+z=e^{ix},\ \forall x>0$

Θέτω $z=u\cdot e^{ix}$ $(\Rightarrow z'=u'\cdot e^{ix}+iue^{ix}=(u'+iu)e^{ix})$

και $z''=(u''+2iu'-u)\cdot e^{ix}$. Αντικαθιστούμε στην (E_1):

$u''+2iu'-\cancel{u}+\cancel{u}=1 \Rightarrow u''+2iu'=1,\ x>0 \quad (E_2)$

Θέτω $u'=A \Rightarrow u''=0$ και άρα στην εξίσωση (E_2)

$2iA=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$

Συνεπώς,

$u'=-\frac{1}{2}i \Rightarrow \boxed{u(x)=-\frac{1}{2}i\cdot x}$

$z=u\cdot e^{ix}=-\frac{1}{2}i\,e^{ix}\cdot x=-\frac{1}{2}ix\cdot(\cos x+i\sin x)=$

$=\underbrace{\frac{x}{2}\sin x}_{Re(z)}+i\underbrace{(-\frac{x}{2}\cdot\cos x)}_{Im(z)},\ \forall x>0$

Η $Im(z)=-\frac{x}{2}\cdot\cos x$ βάσει θεωρίας θα είναι μερική λύση

Δηλαδή, τώρα έχουμε μια μερική λύση της (E_1) και έτσι μπορούμε να την υποβιβάσουμε σε μια α' τάξης με το γνωστό μετασχηματισμό:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1 \cdot z = e^x \cdot z, \quad x>0 \\ y' &= e^x (z+z'), \quad x>0 \\ y'' &= e^x (z''+2z'+z), \quad x>0 \end{aligned}\right\} \text{Αντικαθιστούμε στην } (E_1):$$

$$(1-x)\cancel{e^x}(z''+2z'+z) + x\cancel{e^x}(z+z') - \cancel{e^x} z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x)z'' + (2-x)z' = 0$$

Θέτω $z' = u$ και άρα:

$(1-x)u' + (2-x)u = 0 \leftarrow$ Γ.Δ.Ε. α' τάξης (ομογενής)

$$u(x) = c_1 \cdot e^{-\int \frac{2-x}{1-x} dx} = c_1 \cdot e^{-\int \frac{1+1-x}{1-x} dx} =$$

$$= c_1 \cdot e^{-\int \frac{1}{1-x} dx - \int 1 dx} = c_1 \cdot e^{\log|1-x| - x}, \; x>1 =$$

$$= c_1 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}, \quad \forall x>1$$

$$z' = c_1 \cdot (x-1) e^{-x} \Rightarrow z = \int c_1 \cdot (x-1) e^{-x} dx + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = -c_1 \cdot x \cdot e^{-x} + c_2, \quad x>1$$

Τέλος, $y = e^x \cdot z = e^x (-c_1 \cdot x e^{-x} + c_2) = -c_1 x + c_2 \cdot e^x, \; x>0$

3) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = x^{a} z$, $a \in \mathbb{R}$ (κατάλληλος πραγματικός) να επιλυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right) y = x^{3/2} \cdot \sin x, \quad \forall x>0$$

ΛΥΣΗ

$$y = x^a z \Rightarrow y' = a x^{a-1} z + x^a z' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = a(a-1) x^{a-2} z + z' a x^{a-1} + a x^{a-1} z' + x^a z''$$

Με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε:

$$x^2 (x^a z'' + a x^{a-1} z' + z' \cdot a \cdot x^{a-1} + a(a-1) x^{a-2} z) + x \cdot (a x^{a-1} z + x^a z') +$$

$$+ \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right) x^a z = x^{3/2} \sin x, \quad \forall x>0 \Rightarrow$$

της μη ομογενούς. Άρα, $y_\mu(x) = -\frac{x}{2}\cdot\cos x$, $\forall x>0$

Άρα, η γενική λύση θα δίνεται από τον τύπο:

$$z = \tilde{z} + z_\mu = c_1\cdot\sin x + c_2\cdot\cos x - \frac{x}{2}\cdot\cos x, \quad \forall x>0$$

και άρα

$$y = x^{-1/2}\cdot z = x^{-1/2}\left(c_1\cdot\sin x + c_2\cdot\cos x - \frac{x}{2}\cdot\cos x\right), \quad \forall x>0$$

4) ΝΔΟ οι συναρτήσεις
$y_1(x) = x^{-1/2}\cdot\cos x$, $x>0$ και $y_2(x) = x^{-1/2}\cdot\sin x$, $x>0$
αποτελούν ΒΣΛ της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
(E_0) $x^2\cdot y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$, $x>0$
Στη συνέχεια να επιλυθεί η μη ομογενής Δ.Ε:
(E) $x^2\cdot y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$, $x>0$

ΛΥΣΗ

Για να αποτελούν ένα ΒΣΛ της εξίσωσης (E_0) θα πρέπει πρώτον, να είναι λύσεις της. Εύκολα βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ επαληθεύουν την (E_0). Δεύτερον, θα πρέπει: $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & x^{-1/2}\sin x \\ -\frac{x^{-3/2}}{2}\cdot\cos x + x^{-1/2}(-\sin x) & -\frac{x^{-3/2}}{2}\sin x + x^{-1/2}\cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \neq 0 \ (x>0)$$

Για τη μη ομογενή:
$y = y_\mu + \tilde{y}$ όπου $\tilde{y} = c_1\cdot(x^{-1/2}\cos x) + c_2\cdot(x^{-1/2}\sin x)$

Αρκεί, να βρούμε μια μερική λύση για την (E)

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2}\cdot\sin x \\ 1 & -\frac{x^{-3/2}}{2}\cdot\sin x + x^{-1/2}\cdot\cos x \end{vmatrix} = -x^{-1/2}\cdot\sin x, \quad x>0$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & 0 \\ -\frac{x^{-3/2}}{2}\cos x - x^{-1/2}\sin x & 1 \end{vmatrix} = x^{-1/2}\cos x, \quad x>0$$

-Άρα,

$$y_H = y_1(x)\cdot\int_1^x \frac{-t^{-1/2}\sin t}{t^{-1}}\,\frac{t^{3/2}}{t^2}\,dt + y_2(x)\int_1^x \frac{t^{-1/2}\cos t}{t^{-1}}\cdot\frac{t^{3/2}}{t^2}\,dt =$$

$$= -x^{-1/2}\cos x(-\cos x+\cos 1) + x^{-1/2}\sin x(\sin x-\sin 1) =$$

$$= x^{-1/2}(\cos^2 x+\sin^2 x) - x^{-1/2}(\cos x\cdot\cos 1+\sin x\cdot\sin 1) =$$

$$= x^{-1/2} - x^{-1/2}\cos(x-1) = x^{-1/2}(1-\cos(x-1)) \quad , x>0$$

Άρα, $y = \tilde{y} + y_H \Rightarrow$

$\Rightarrow y = c_1\cdot x^{-1/2}\cdot\cos x + c_2\cdot x^{-1/2}\cdot\sin x + x^{-1/2}\cdot(1-\cos(x-1))$, $x>0$
με c_1, c_2: αυθ. σταθερές

5) Έστω η ομογενής γραμμική Δ.Ε

(E_0): $y'' + p\cdot y' + q\,y = 0$

όπου $p, q \in C((a,\beta))$ με $-\infty \le a < \beta \le \infty$. Ας είναι $x_0 \in (a,\beta)$ και y_1, y_2 λύσεις της (E_0). ΝΔΟ εάν $y_1(x_0)=0$ και $W(y_1,y_2)(x_0)=0$, τότε είτε είναι $y_1(x)=0$ είτε

$$y_2(x) = \left[\frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)}\right]\cdot y_1$$

ΛΥΣΗ

Έστω y_1, y_2 λύσεις της (E_0) ώστε

$y_1(x_0)=0$ και $W(y_1,y_2)(x_0)=0$ με $x_0\in(a,\beta)$

$$W(y_1,y_2)(x_0) = \det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{pmatrix} = -y_1'(x_0)\cdot y_2(x_0) = 0$$

$\Rightarrow y_2(x_0)\cdot y_1'(x_0) = 0 \Rightarrow y_2(x_0)=0$ ή $y_1'(x_0)=0$

τότε έχουμε δύο περιπτώσεις

είτε $y_1'(x_0)=0$ είτε $y_1'(x_0)\neq 0$ και να είναι $y_2(x_0)=0$

- Ας είναι $y_1'(x_0)=0$ (και προφανώς $y_2(x_0)\neq 0$) ενώ ισχύει ότι $y_1(x_0)=0$ τότε από Θ. ύπαρξης μονοσήμαντου $y_1(x)=0$
- Ας είναι $y_1'(x_0)\neq 0$ (και προφανώς $y_2(x_0)=0$)

και ΘΔΟ, $y_2(x) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} \cdot y_1(x)$

Εστω συνάρτηση

$$u(x) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1(x) \Rightarrow u(x_0) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1(x_0) = 0$$

Αλλα, $y_2(x)=0$ σε αυτή την περίπτωση

άρα $u(x) = y_2(x) = 0$

τότε,

$$u'(x_0) = \frac{y_2'(x_0)}{\cancel{y_1'(x_0)}} \cdot \cancel{y_1'(x_0)} = y_2'(x_0)$$

Αρα, $\boxed{u = y_2}$ και έτσι $y_2(x) = \frac{y_2'(x)}{y_1'(x_0)} y_1(x)$.

6) Εστω η ομογενής γραμμική Δ.Ε

$$\sum_{k=0}^{5} y^{(k)} = 0 \quad (*)$$

i) Να βρεθεί ενα ΒΕΛ των πραγματικών λύσεων εις (*)

ii) ΝΔΟ το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων εις (*) οι οποίες τείνουν προς το μηδεν για $x \to \infty$, είναι ενας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και έπειτα να βρεθεί μια βάση αυτων

Λυση

i) $y + y' + y'' + y''' + y^{(4)} + y^{(5)} = 0$

Εστω το Χαρ. πολυωνυμο:

$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^1 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^3(\lambda^2+\lambda+1) + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda^3+1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ ή $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ή $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

Δηλαδή, εχουμε ρίζες:

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_5 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Ενα ΒΕΛ είναι το εξής.

$S = \{ e^{-x}, e^{-1/2x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{-1/2x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{1/2x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{1/2x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \}$

ii) Το σύνολο που μας δίνεται είναι το ακόλουθο:

$$\{y : y \text{ πραγματική λύση της } (E_0) \mid \lim_{x\to\infty} y(x)=0\}$$

και θδο το σύνολο αυτό είναι ένας γραμμικός $\mathbb{R}$ χώρος

Από γραμμική Αλγεβρα:

- Έστω y_1 και y_2 πραγματικές λύσεις της (E_0) ώστε $\lim_{x\to\infty} y_1(x)=0$ και $\lim_{x\to\infty} Y_2(x)=0$

  Τότε το άθροισμα y_1+y_2 θα έχει όριο:

  $\lim_{x\to\infty} (y_1(x)+y_2(x))=0$

- Έστω $c\in\mathbb{R}$ και y πραγματική λύση της (E_0) ώστε $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ τότε το γινόμενο $c\cdot y$ θα έχει όριο

  $\lim_{x\to\infty} (c\cdot y)=0$

Άρα, το σύνολο είναι γραμμικός $\mathbb{R}$ χώρος.

Υπολογίζουμε:

$\lim_{x\to\infty} y_1(x)=\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$

$\lim_{x\to\infty} y_2(x)=\lim_{x\to\infty} e^{-1/2x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)=0$ ← Μηδεν. επί φραγμ.

$\lim_{x\to\infty} y_3(x)=\lim_{x\to\infty} e^{-1/2x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)=0$ ← Μηδεν επι φραγμ.

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty} y_4(x)=\lim_{x\to\infty} e^{1/2x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)=\text{ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ}\\ \lim_{x\to\infty} y_5(x)=\lim_{x\to\infty} e^{1/2x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)=\text{ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ}\end{array}\right\}\longrightarrow$

→ Επιλέγουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις.

Άρα, μια βάση του συνόλου είναι η

$\{e^{-x}, e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\}$ αφού $\exists c_1,c_2,c_3$:

$y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 x}, \quad x \geq 0$$

Έτσι,

$$y_\mu(x) = y_1(x)\cdot\int_0^x \frac{-e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}\cdot\frac{\sin t}{(t+1)^2}\,dt + y_2(x)\cdot\int_0^x \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}\cdot\frac{\sin t}{(t+1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\Bigg[\underbrace{-e^{\lambda_1 x}\cdot\int_0^1 \frac{e^{\lambda_2 t}}{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}\,\frac{\sin t}{(t+1)^2}\,dt}_{A} + \underbrace{e^{\lambda_2 x}\cdot\int_0^x \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}\,\frac{\sin t}{(t+1)^2}\,dt}_{B}\Bigg].$$

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y_\mu(x).$$

$\tilde{y}(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (διότι $\lim_{x\to\infty}\tilde{y}(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda_1 x}\cdot c_1 + \lim_{x\to\infty} e^{\lambda_2 x}\cdot c_2 =$

$$= c_1\cdot\lim_{x\to\infty} e^{\lambda_1 x} + c_2\cdot\lim_{x\to\infty} e^{\lambda_2 x} \overset{Re\lambda_{1,2}<0}{=} 0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 = 0).$$

Θέλω $y_\mu(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (δηλ. θέλω $A\to 0$ και $B \to 0$)

Για κάθε $x \geq 0$:

Έστω, $f(x) = e^{\lambda x}\cdot\int_0^x e^{-\lambda t}\cdot\frac{\sin t}{(t+1)^2}\,dt$, $\lambda\in\mathbb{C}$ & $Re\lambda<0$.

Έτσι,

$$|f(x)| \leq |e^{\lambda x}|\cdot\int_0^x |e^{-\lambda t}|\cdot\frac{|\sin t|}{(t+1)^2}\,dt \leq |e^{\lambda x}|\cdot\int_0^x |e^{-\lambda t}|\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\,dt =$$

$$= e^{Re(\lambda)x}\cdot\int_0^x e^{-Re(\lambda)t}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\,dt.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{Re(\lambda)x}\cdot\int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\,dt\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{-Re(\lambda)t}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\,dt}{e^{-Re(\lambda)x}} \quad (1)$$

- Εάν $\int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\,dt < +\infty$ τότε η (1) θα συγκλίνει στο μηδέν.
- Εάν $\int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t}\,\frac{1}{(t+1)^2}\,dt = +\infty$ τότε η (1) μέσω του κανόνα L'Hôspital είναι:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{-Re(\lambda)}\frac{1}{(t+1)^2}\,dt}{e^{-Re(\lambda)x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{Re(\lambda)}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right) = 0$$

Άρα, από θ. ισοσυγκλινουσών: $\lim_{x\to\infty}|f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(x) = y_\mu(x)$

7) Ας είναι β και γ θετικοί αριθμοί με $\beta^2 \neq 4\gamma$.
ΝΔΟ όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
$y'' + \beta y' + \gamma \cdot y = (x+1)^{-2} \cdot \sin x \quad , \forall x \geq 0$ τείνουν στο 0 για $x \to \infty$

ΛΥΣΗ

Η αντίστοιχη ομογενής είναι η εξής:
(E_0): $y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \quad , \forall x \geq 0$
ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση β' τάξης με σταθ. συντελεστές
$p(\lambda) = \lambda^2 + \beta \cdot \lambda + \gamma = 0$
$\Delta = \beta^2 - 4\gamma \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$:
τότε $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$ όπου έχουμε ότι
$\lambda_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$ αρνητική (προφανές)
και
$\lambda_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$ αρνητική (Διότι: έστω $\lambda_2 < 0 \Rightarrow -\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta^2 - 4\gamma < \beta^2 \Rightarrow \gamma > 0$, ισχύει)

- Αν $\Delta < 0$:
τότε $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\beta \mp i\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$ όπου είναι δύο συζυγείς
και μη πραγματικές ρίζες με πραγματικά μέρη αρνητικά.

Άρα, όπως και να 'χει, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(\lambda)$
έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες λ_1, λ_2 με αρνητικά
πραγματικά μέρη (δηλ. $Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0$)
Έτσι, ένα ΒΣΛ της (E_0), είναι:
$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \ x \geq 0$ και $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ x \geq 0$
Συνεπώς, όλες οι λύσεις της (E_0) δίνονται από:
$\tilde{y}(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}, \ \forall x \geq 0 \quad c_1, c_2$: αυθ. σταθ.
Αρκεί, τώρα να βρούμε μια μερική λύση της μη ομογενούς
(E): $y'' + \beta y' + \gamma y = (x+1)^{-2} \cdot \sin x \ , \forall x \geq 0$

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 - \lambda_2) x}, \ x \geq 0$$

$$W_1(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} 0 & e^{\lambda_2 x} \\ 1 & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = -e^{\lambda_2 x}, \ x \geq 0$$

8) Με την αντικατάσταση $z=e^{-y/x}$ να επιλυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$x^3 \cdot y'' + 2x^2 = (xy'-y)^2 \qquad y(1)=0 \ , \ y'(1)=2$$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $z=e^{-\frac{y}{x}}$, $x\neq 0$.
Για τη συγκεκριμένη εξίσωση και τις συνθήκες το πεδίο ορισμού μας $I=(0,\infty)$

$$z=e^{-\frac{y}{x}} \Leftrightarrow -\frac{y}{x} = \log z \Leftrightarrow -y = x\log z \Leftrightarrow y=-x\cdot \log z$$

$$y' = -\log z - x\frac{z'}{z} \quad \text{και} \quad y'' = -\frac{2z'}{z} - x\frac{z''}{z} + x\left(\frac{z'}{z}\right)^2$$

Αντικαθιστούμε στην Δ.Ε:

$$x^3\cdot\left(-\frac{2z'}{z} - x\frac{z''}{z} + x\left(\frac{z'}{z}\right)^2\right) + 2x^2 = \left(x\left(-\log z - x\frac{z'}{z}\right) + x\cdot\log z\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^3\cdot\frac{z'}{z} - x^4\cdot\frac{z''}{z} + 2x^2 = 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} x^2\cdot z'' + 2x\cdot z' - 2z = 0 \ , \ x>0 \quad (E^*)$$

Πρόκειται για μια εξίσωση Euler.

Θέτω $t=\log x \Leftrightarrow x=e^t$

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dt} \Rightarrow \boxed{x\cdot z' = \frac{dz}{dt}}$$

$$z'' = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dz}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dt}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'' = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\right) \Rightarrow \boxed{x^2\cdot z'' = -\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}}$$

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε:

$$-\frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} - 2z = 0 \Rightarrow z''(t) + z'(t) - 2z(t) = 0 \quad (E_1)$$

Γραμμική με σταθ. συντελεστές

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -2$ ιδιοτιμές πολ/τας 1

Ενα ΒΣΛ, είναι:

$$\{ z_1(t) = e^t \ , \ z_2(t) = e^{-2t} \} \ , \ t\in\mathbb{R}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ της (E_1):

$$z(t) = c_1\cdot e^t + c_2\cdot e^{-2t} \ , \ t\in\mathbb{R} \quad c_1, c_2 : \text{αυθ. σταθ.}$$

Ετσι, ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ της (E^*) είναι:

$$z(x) = c_1\cdot x + c_1\cdot x^{-2} \ , \ x>0$$

Συνεπώς, γενική λύση της αρχικής Δ.Ε είναι:

$$y(x) = -x\log(c_1\cdot x + c_2\cdot x^{-2}) \ , \ \forall x>0 \ , \ c_1, c_2 : \text{αυθ. σταθ.}$$

$y(1)=0 \Rightarrow -\log(c_1+c_2)=0 \Rightarrow c_2 = 1-c_1 \quad (1)$

$y'(1)=2 \Rightarrow -\log(c_1+c_2) - \dfrac{(c_1-2c_2)}{c_1+c_2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(c_1+c_2)\cdot\log(c_1+c_2) - (c_1-2c_2) = 2(c_2+c_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(c_1+c_2) = -\dfrac{3c_1}{c_1+c_2} \Rightarrow c_1+c_2 = e^{-3c_1/c_1+c_2} \quad (2)$

Απο, (1) και (2) έχουμε:

$c_1=0$ και $c_2=1$

Άρα,

$y(x) = -x\log\dfrac{1}{x^2}, \; x>0.$ ← ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΤ

g) ΝΔΟ υπάρχουν πραγματικές σταθερές a και δ έτσι ώστε για κάθε λύση y της γραμμικής Δ.Ε

$y''+8y'+25y = 2\cos x \quad , \forall x\in\mathbb{R}$

να ισχύει: $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x) - a\cos(x-\delta)) = 0$

ΛΥΣΗ

Έστω $(E): y''+8y'+25y = 2\cos x \quad , x\in\mathbb{R}$ και η ομογενής

$(E_0): y''+8y'+25y = 0 \quad , x\in\mathbb{R}$

- Για την (E_0) βρίσκω τη γενική της λύση:

Έστω το Χαρ. πολυώνυμο

$P(\lambda) = \lambda^2+8\lambda+25 = 0 \Rightarrow (\Delta = 64-4\cdot25 = -36 = 36i^2 > 0)$

Άρα, $\lambda_1 = \dfrac{-8+i\cdot6}{2} = -4+3i$ και $\lambda_2 = \dfrac{-8-i\cdot6}{2} = -4-3i$

Ένα βασικό σύνολο λύσεων (ΒΣΛ) της Δ.Ε είναι:

$\{e^{-4x}\cos3x, \; e^{-4x}\sin3x\}$

Άρα, $\tilde{y}(x) = c_1\cdot e^{-4x}\cos3x + c_1\cdot e^{-4x}\sin3x \quad , \forall x\in\mathbb{R}$

- Για την (E) βρίσκω μια μερική λύση της.

Έχουμε:

$y''+8y'+25y = 2\cos x \quad , x\in\mathbb{R}$ και θεωρούμε τη Δ.Ε

$y''+8y'+25y = 2\cdot e^{ix}$

Έτσι, θέτουμε $y = z\cdot e^{ix} \Rightarrow y' = (z'+iz)e^{ix}$

$\Rightarrow y'' = (z''+2iz'-z)\cdot e^{ix}$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε:

$(z''+2iz'-z) + 8(z'+iz) + 25z = 2 \Rightarrow z'' + (i+4)z' + (4i+12)z = 1$

Θέτω τη μικρότερης τάξης παράγωγο του με ένα τυχαίο πολυώνυμο βαθμού ίδιου με το δεξί μέλος

άρα $z = a \rightsquigarrow z' = 0 \rightsquigarrow z'' = 0$

άρα $(4i+12)a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{4i+12} = \dfrac{-4i+12}{(4i+12)(12-4i)} = \dfrac{1}{40}(3-i)$

Δηλαδή, $z = \dfrac{1}{40}(3-i)$

Έτσι, $y_\mu(x) = \dfrac{1}{40}(3-i)e^{ix} = \dfrac{1}{40}(3-i)(\cos x + i\sin x) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{40}(3\cos x + \sin x)}_{\text{Πραγματικό μέρος}} + i\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{40}(3\sin x - \cos x)\right)}_{\text{φανταστικό μέρος}}$$

Άρα, εφόσον $L(y) = 2\cdot\cos x$ τότε από θεωρία:

$y_\mu(x) = \dfrac{1}{40}(3\cos x + \sin x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Έτσι,

$y = \tilde{y} + y_\mu = c_1\cdot e^{-4x}\cos 3x + c_2\cdot e^{-4x}\sin 3x + \dfrac{1}{40}(3\cos x + \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$

Αναζητούμε, τα a και $\delta \in \mathbb{R}$ ώστε

$\lim\limits_{x\to\infty}(y(x) - a\cos(x-\delta)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\cancelto{0}{c_1 e^{-4x}\cos 3x} + \cancelto{0}{c_2 e^{-4x}\sin 3x} + \dfrac{1}{40}(3\cos x + \sin x) - a\cos(x-\delta)\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{40}\cos x + \dfrac{1}{40}\sin x - a(\cos x\cdot\cos\delta + \sin x\cdot\sin\delta)\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{40}\cos x + \dfrac{1}{40}\sin x - a\cos x\cos\delta - a\cdot\sin x\cdot\sin\delta\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\dfrac{3}{40} - a\cos\delta\right)\cos x + \left(\dfrac{1}{40} - a\sin\delta\right)\sin x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{40} - a\cos\delta\right)\cos x + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{40} - a\sin\delta\right)\sin x = 0$

Αναγκαστικά εφόσον $\nexists \lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ (ή $\sin x$) θα πρέπει:

$\dfrac{3}{40} - a\cos\delta = 0$ και $\dfrac{1}{40} - a\sin\delta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2\cdot\cos^2\delta = \dfrac{9}{1600}$ και $a^2\cdot\sin^2\delta = \dfrac{1}{1600} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2\cdot(\underbrace{\cancel{\cos^2\delta + \sin^2\delta}}_{1}) = \dfrac{9}{1600} + \dfrac{1}{1600} = \dfrac{10}{1600} = \dfrac{1}{160} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{160} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{1}{160}} \Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{40}$.

Έτσι, $\delta = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ και $\delta = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

10) Έστω η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση
(Ε): $y''-y'\cdot\cos x+y\cdot\sin x=\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και ας συμβολίσουμε με (E_0): την αντίστοιχη ομογενή. Αφού διαπιστωθεί ότι η $y_1(x)=e^{\sin x}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι μία λύση (μερική) της (E_0), να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_0). Στη συνέχεια να βρεθεί η (μερική) λύση y_M της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες: $y_M(0)=y_M'(0)=0$
(Τέλος να βρεθεί η λύση y της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$ και $y'(0)=0$)

ΛΥΣΗ

Εύκολα βλέπουμε ότι η $y_1(x)=e^{\sin x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ αποτελεί λύση της (E_0) (αν την αντικαταστήσουμε την επαληθεύει)

Με τη μέθοδο υποβιβασμού της (E_0):

Θέτω $y=z\cdot y_1=z\cdot e^{\sin x}\Rightarrow y'=z'\cdot e^{\sin x}+\cos x\, e^{\sin x}\cdot z\Rightarrow$

$\Rightarrow y''=(z''+2z'\cos x-z\cdot\sin x+z\cdot\cos^2 x)\,e^{\sin x}$

Αντικαθιστώ στην (E_0) και μετά από υπολογισμούς, έχουμε:

$z''+z'\cdot\cos x=0$, και θέτω $z'=u$

Άρα $u'+\cos x\cdot u=0$ ← γραμ. 1ης τάξης

Έτσι, επιλύοντας τη παίρνουμε:

$u(x)=e^{-\sin x}$, $x\in\mathbb{R}$

Άρα, $z'=u=e^{-\sin x}\Rightarrow z=\int_0^x e^{-\sin t}\,dt$

Άρα, μια λύση της (E_0) είναι:

$y_2(x)=e^{\sin x}\int_0^x e^{-\sin t}\,dt$, $x\in\mathbb{R}$

ΘΔΟ $\{y_1,y_2\}$ ΒΣΛ της (E_0) $\Leftrightarrow$ y_1,y_2 γραμ. ανεξάρτητες

$c_1y_1+c_2y_2=0\Rightarrow c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow c_1\cdot \cancel{e^{\sin x}}+c_2\cdot e^{\sin x}\int_0^x e^{-\sin t}\,dt=0\Rightarrow$

$\Rightarrow c_1+c_2\cdot\int_0^x e^{-\sin t}\,dt=0$, $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$: $c_1=0$

Για $x=1$: $c_2\int_0^x e^{-\sin t}\,dt=0\Rightarrow c_2=0$

Άρα, y_1,y_2 γραμ. ανεξ. $\Leftrightarrow$ y_1,y_2 ΒΣΛ. της (E_0)

Συγκεκριμένα, για τις συνθήκες $y_M(0)=y_M'(0)=0$

Παρατηρούμε ότι η μερική λύση είναι η $y_\mu(x)=1$

Άρα, ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ $y(x)=c_1\cdot e^{\sin x}+c_2\cdot e^{\sin x}\int_0^x e^{-\sin t}\,dt+1$, $x\in\mathbb{R}$

$y_M(0)=0\rightsquigarrow c_1=-1$ και $y_M'(0)=0\rightsquigarrow c_2=1$